Investigação Filosófica: vol. 4, n. 1, artigo digital 4, 2013.

O Princípio de não-contradição e sua tradução para a aritmética transreal (The Principle of non-contradiction and its translation into transreal arithmetic)

Walter Gomide

Universidade Federal de Mato Grosso

Introdução

Não há dúvida de que a lógica contemporânea colocou sob análise ou suspeita um dos pilares do pensamento ocidental: o princípio de não-contradição. Desde o surgimento da lógica paraconsistente, a partir dos trabalhos do lógico brasileiro Newton da Costa, nos anos 60 do século XX, até o desenvolvimento do "dialeteísmo", vertente filosófica capitaneada pelo lógico inglês Graham Priest, que postula que há de fato, no mundo, contradições verdadeiras, o princípio de não contradição deixou de ser uma diretriz do pensamento racional, passando a ser, dentro de certos limites, atenuado (sobre a lógica paraconsistente, ver Da Costa [1993] e sobre o Dialeteísmo, ver Priest [2008])

Mas o que, de fato, é o princípio de não-contradição? Este artigo visa dar uma resposta a esta pergunta, de tal forma que instrumentos da aritmética transreal sejam usados a fim de oferecer uma tradução ilustrativa do comportamento do princípio de não contradição, seja em sistemas clássicos, que adotam tal princípio como verdadeiro, seja nos ditos sistemas não-clássicos, que atenuam ou eliminam a verdade de tal princípio.

O princípio de não-contradição será tratado dentro da estrutura dos números transreais, novo domínio aritmético criado pelo Prof. James Anderson (ver Anderson, [2008]).

Os números transreais

Os números transreais consistem em uma generalização dos números reais **R.** Basicamente, a novidade introduzida pelos transreais é a permissão da divisão por zero, o que não é aceito no âmbito dos números reais. De fato, a introdução da divisão irrestrita por zero, como definida nos transreais, não foi aceita de forma consensual na comunidade matemática. Em especial, a divisão de zero por zero (a qual dá origem ao número transreal "nullity") é vista como uma mera tradução (ou "renomeação") do já conhecido *NaN* ("Not a Number"), o qual aponta simplesmente que foi cometido um erro sintático na manipulação das operações aritméticas.

Para obter os números transreais $\mathbf{R}^{\mathbf{T}}$ dos números reais, primeiramente são introduzidos os seguintes números (ver Anderson, [2008]):

(1) $1/0 = \infty$;

(2) $-1/0 = -\infty$.

Desta forma, chegamos ao domínio dos *números reais estendidos*:

(3) $R^E = R \cup \{-\infty, \infty\}$.

A partir dos números reais estendidos, chega-se ao números transreais mediante a introdução da constante Φ, definida da forma seguinte:

(4) $0/0 = \Phi$.

Desta forma, os transreais R^T são definidos como:

(5) $R^T = R^E \cup \{\Phi\}$.

É possível definir as operações usuais da aritmética nos números transreais de forma consistente (ver ANDERSON *et al*, [2007]).

Os números transreais podem ser visualizados da forma seguinte:

Φ

-∞ ... _________________0_____________________...∞

A constante Φ (denominda por Anderson de *nullity*) ocupa uma posição *fora* da reta representativa dos números reais estendidos $R^E = R \cup \{-\infty, \infty\}$.

Um resultado interessante se depreende no que diz respeito à relação de ordem < que se estabelece nos transreais R^T. Para qualquer número real r, valem sempre as seguintes desigualdades:

(6) $r < \infty$;

(7) $-\infty < r$

Entretanto, a constante Φ não é ordenada em R^T, isto é, para qualquer número $t \in R^T$, temos sempre que:

(8) $\neg(t < \Phi)$;

(9) $\neg(\Phi > t)$.

O Princípio de não-contradição "traduzido" para a aritmética transreal

Consideremos, inicialmente, variáveis proposicionais ψ e φ que tomam por valores constantes de predicado de aridade 0 – letras sentencias, que pertencem ao vocabulário de uma linguagem L. Suponhamos agora que há uma função *v*, definida no conjunto $P = \{\psi, \varphi\}$, e que toma por valores números transreais não-negativos. Consideremos também que há uma função σ que associa os valores transreais de *v* com elementos do seguinte conjunto Λ:

$$\Lambda = \{T, F, c, i\},$$

Λ é o conjunto de todos os possíveis valores de verdade que uma constante de predicado, uma vez interpretada, pode ter, isto é: "T" é o *verdadeiro,* "F" é o *falso*, "c" é *tanto verdadeiro como falso*, e "i" é *nem verdadeiro, nem falso*.

A partir da função *v* (cujos valores nos números transreais maiores ou igual a zero, a partir do conjunto Λ, são definidos arbitrariamente), podemos definir uma função σ que associa os valores transreais não-negativos (arbitrários) de *v* no domínio Λ:

a) Se $v(Y_{\in P}) = r_{\in R\ (\text{reais}) > 0}$, então $\sigma(v(Y_{\in P})) = c$;

b) Se $v(Y_{\in P}) = \infty$, então $\sigma(v(Y_{\in P})) = T$;

c) Se $v(Y_{\in P}) = 0$, então $\sigma(v(Y_{\in P})) = F$;

d) Se $v(Y_{\in P}) = \Phi$, então $\sigma(v(Y_{\in P})) = i$.

Claramente, a função σ atribui valores de verdade a partir de valores transreais que são imagens de parâmetros proposicionais de uma linguagem L.

Consideremos agora que L, além de constantes de predicado, também possui os símbolos lógicos usuais do alfabeto do cálculo proposicional, isto é, $\lambda = \{\neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \wedge, \vee\}$ é um subconjunto de L. Sendo assim, em L, também podem se definir fórmulas moleculares, resultantes de conhecidas regras recursivas de formação de fórmulas (ver PRIEST, p.4, [2008]).

A linguagem L pode ser interpretada. De fato, a função σ tem o papel de interpretar (isto é, atribuir um valor de verdade) às constantes de predicado presentes em L (em um primeiro momento, considera-se aqui que tais constantes de predicado são letras sentenciais, isto é, constantes de predicado que são interpretadas não como conjuntos, mas diretamente como valores de verdade). Uma vez sendo interpretadas as constantes de predicado, as fórmulas também admitem ser interpretadas por meio de conhecidas regras semânticas que "espelham" os procedimentos recursivos utilizados para a formação de fórmulas moleculares. Na semântica das lógicas ditas clássicas, de natureza bivalente, as regras pelas quais as fórmulas complexas são valoradas a partir de seus componentes atômicas são as seguintes (no que se segue, ψ e φ são parâmetros proposicionais que percorrem o domínio das constantes de predicado de L, e σ a função anteriormente definida):

1) $\sigma(v\ (\neg\psi)) = T$ sse $\sigma(v\ (\psi)) = F$.

2) $\sigma(v\ (\psi \wedge \varphi)) = T$ sse $\sigma(v\ (\psi)) = T$ e $\sigma\ (v\ (\varphi)) = T$.

3) $\sigma(v\ (\psi \vee \varphi)) = T$ sse $\sigma(v\ (\psi)) = T$ ou $\sigma\ (v\ (\varphi)) = T$.

4) $\sigma(v\ (\psi \rightarrow \varphi)) = T$ sse $\sigma(v\ (\psi)) = F$ ou $\sigma\ (v\ (\varphi)) = T$

5) $\sigma(v\ (\psi \leftrightarrow \varphi)) = T$ sse $\sigma(v\ (\psi)) = \sigma\ (v(\psi))$

É sabido que há um único operador lógico, a barra de Sheffer "$\uparrow$", por meio do qual todas as condições valorativas acima expressas podem ser equivalentemente definidas só com tal conectivo. Mais especificamente, os valores de verdade que podem ser atribuídos à barra de Sheffer obedecem à seguinte equação:

6) $\sigma(v\ (\psi\uparrow\varphi)) = \sigma(v(\neg(\psi\wedge\varphi)))$.

Segue-se, então, que:

7) $\sigma(v\ (\psi\uparrow\psi)) = \sigma(v\ (\neg(\psi\wedge\psi))) = \sigma(v\ (\neg\psi))$.

Desta forma,

8) $\sigma(v\ (\psi\uparrow(\psi\uparrow\psi)) = \sigma(v\ (\neg\ (\psi \wedge \neg\psi)))$

A expressão acima nos dá a maneira pela qual o princípio de não-contradição, sob o ponto de vista semântico, pode ser apresentado somente com a barra de Sheffer.

Cabe notar aqui que a barra de Sheffer admite uma tradução para a aritmética transreal. De fato, a expressão:

9) $v(\psi \uparrow \varphi) = (1/v(\psi) + 1/v(\varphi))$

"mapeia" a barra de Sheffer para o domínio da aritmética transreal. Uma vez que na aritmética transreal $1/0 = \infty$ e $1/\infty = 0$, então fica evidente que os valores admitidos pela expressão acima, para quaisquer valores transreais não-negativos de $v(\psi)$ e $v(\varphi)$, serão os valores semanticamente esperados para a barra de Sheffer, isto é[1]:

10) $\sigma(v(\psi \uparrow \varphi)) = \sigma((1/v(\psi) + 1/v(\varphi))$.

O Princípio de não-contradição, expresso por meio da barra de Sheffer, pode ser traduzido à aritmética transreal através de:

11) $v(\psi \uparrow (\psi \uparrow \psi)) = (1/v(\psi) + 1/v(\psi \uparrow \psi))$,

o que nos dá:

12) $\sigma(v(\psi \uparrow (\psi \uparrow \psi)) = \sigma((1/v(\psi) + 1/v(\psi \uparrow \psi))$.

Chamemos $(1/v(\psi) + 1/v(\psi \uparrow \psi))$ de π_ψ. Temos então o seguinte:

Se $\pi_\psi \neq \infty$, então $\sigma(\pi_\psi) \neq T$ (o princípio de não-contradição, semanticamente, se comporta de forma *não-clássica*). Por sua vez, se $\pi_\psi = \infty$, então $\sigma(\pi_\psi) = T$ (o princípio de não-contradição, semanticamente, se comporta de forma *clássica*).

Portanto, a grandeza π_ψ, inteiramente definida na aritmética transreal, serve como um parâmetro do comportamento semântico do princípio de não-contradição. Mas isto nos leva a um problema mais fundamental:

A equação acima, 10), nos dá uma tradução para a aritmética transreal da barra de Sheffer. A partir desta tradução, uma versão (trans) aritmética do princípio de não-contradição surge através da grandeza π_ψ. Mas o que, de fato, significa tal grandeza, a ponto de ser um parâmetro perfeitamente adequado para nos indicar o comportamento semântico do princípio de não contradição?

Para responder à pergunta acima formulada, duas hipóteses são introduzidas. A primeira, busca resolver a questão mediante uma interpretação (trans) métrica[2] da barra de Sheffer; a segunda, associa a barra de Sheffer à medidas de conjuntos

---

1 Na aritmética transreal, se $1/v(\psi)$ é igual a Φ ou se $1/v(\varphi)$ é igual a Φ, então $(1/v(\psi) + 1/v(\varphi))$ é igual a Φ, para qualquer valor que a parcela restante possa ter; se tanto $1/v(\psi)$ for um número real *e* $1/v(\varphi)$ também for um número real, então $(1/v(\psi) + 1/v(\varphi))$ é um número real, como era de se esperar. Se uma das parcelas envolvidas for um número real e a outra for um transreal pertencente a $\{\infty,\Phi\}$, então a soma nos dá um transreal, Φ ou ∞.

2 Por "interpretação (trans) métrica" entende-se a compreensão da barra de Sheffer como distância, no espaço (trans) métrico, entre conjuntos. Vale dizer que tal distância toma por valores tantos números reais como Φ ou ∞.

A barra de Sheffer como distância entre conjuntos

Consideremos os predicados P e Q pertencentes a uma linguagem L. A estes dois predicados, mediante uma função f, façamos corresponder duas regiões Π e K de um espaço trans-métrico G. Por um espaço trans-métrico, entende-se uma generalização da noção de espaço métrico, de tal forma que em G estão definidas tanto distâncias de valores reais, quanto valores trans-reais. Os postulados que definem um espaço trans-métrico são os seguintes (ANDERSON, [2008]):

- $t(a,b) = t(b,a)$.
- $\neg(t(a,b) < 0)$
- $t(a,b) = 0$ sse $a = b$
- $\neg(t(a,b) + t(b,c) < t(a,c))$

Nos postulados acima, a função t é chamada de trans-métrica, e pode tomar por valores tanto números reais quanto transreais.

Seja agora a função f que associa os predicados P e Q a regiões do espaço transmétrico G.

- $P \rightarrow^{f} \Pi$.
- $Q \rightarrow^{f} K$.

Consideremos agora que se possa avaliar a distância entre Π e K (uma maneira de se fazer isto seria por meio da noção de "distância de Hausdorff" entre conjuntos[3]).

Desta maneira, a barra de Sheffer, traduzida na artimética transreal, poderia ser vista como uma função g desta distância entre regiões no espaço trans-métrico, isto é:

- $v(P\uparrow Q) = g[t(\Pi, K)]$,

de tal forma que

- se $t(\Pi, K) = \infty$, então $v(P\uparrow Q) = \infty$;
- se $t(\Pi, K) \neq \infty$, então $v(P\uparrow Q) \neq \infty$.

[3] A distância de Hausdorff entre dois subconjuntos X e Y de um determinado espaço métrico definida da forma seguinte: $D_H(X,Y) = \max\{\sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} d(x,y), \sup_{y\in Y} \inf_{x\in X} d(x,y)\}$.

A distância infinita entre conjuntos pode ser obtida da forma seguinte. Façamos os predicados P e Q serem mapeados, no espaço transmétrico G, pelos conjuntos $\Pi = \{\infty\}$ e $K = \{c\}$. Definamos a transmétrica de G como:

$$t(a,b) = |a - b|.$$

No caso em questão, $t(\infty,c) = \infty$[4]. Desta maneira, se tomarmos a distância de Haussdorf entre os conjuntos Π e K, adaptada ao espaço transmétrico (ver nota 3), então $t(\Pi,K) = \infty$.

Portanto, sendo Π^c a região complementar a Π no espaço transmétrico G, podemos introduzir um significado métrico para a tradução π_ψ do princípio de não contradição para a aritmética transreal:

- se $t(\Pi, \Pi^c) = \infty$, então $\pi_\psi = \infty$ (isto é, $\sigma[(\pi_\psi)] = T$);
- se $t(\Pi, \Pi^c) \neq \infty$, então $\pi_\psi \neq \infty$ (isto é, $\sigma[(\pi_\psi)] \neq T$).

As condições acima j) e k) nos dão um critério métrico para que o princípio de não contradição seja verdadeiro: a distância entre as traduções transmétricas de P e não-P (respectivamente, Π e Π^c) deve ser infinita; caso contrário, o princípio de não-contradição tem valor diferente do verdadeiro.

Assim, j) e k) nos oferecem um critério inteiramente métrico para avaliar o comportamento semântico do princípio de não-contradição.

A barra de Sheffer como medida de conjuntos no espaço transmétrico

Consideremos que os predicados P e Q sejam traduzidos para o espaço transmétrico G, por meio de uma função f, como as regiões Π e K:

a) $P \to^f \Pi$

b) $Q \to^f K.$

Como se viu anteriormente,

---

4 Na aritmética transreal, valem as seguintes identidades: para todo número real r, $|\infty - r| = |r - \infty| = \infty$.

c) $v(P{\uparrow}Q) = v(\neg(P \wedge Q)) = v\,(\neg P \vee \neg Q)$.

Consideremos agora que todos os operadores lógicos, por meio de uma função γ, sejam traduzidos para os seus correlatos conjuntísticos (a existência de tal função é garantida pelo fato de que, tanto o cálculo proposicional e a teoria dos conjuntos são uma álgebra booleana e, como tal, são intertraduzíveis). Desta forma, pode-se estipular uma função μ que associa conjuntos aos universos dos transreais:

d) $\mu(\gamma\,(P{\uparrow}Q)) = \mu(\gamma(\,\neg(P \wedge Q))) = \mu(\gamma(\neg P \vee \neg Q)) = \mu((\Pi \cap K)^c) = \mu(\Pi^c \cup K^c)$

Seja L uma linguagem lógica na qual se definem expressões do cálculo proposicional e seja L_c uma linguagem na qual se definem as operações usuais da teoria dos conjuntos. Desta maneira, pode-se estabelecer a seguinte composição das funções v, γ e μ, sendo dadas as condições seguintes e), f), e g):

e) $L \rightarrow^{v} R^T$

f) $L \rightarrow^{\gamma} L_c$

g) $L_c \rightarrow^{\mu} R^T$

Portanto,

h) $L \rightarrow^{v = \mu\gamma} R^T$.

Logo,

i) $v(P{\uparrow}Q) = \mu\gamma\,(P{\uparrow}Q) = \mu(\Pi^c \cup K^c) = 1/\mu(\Pi^c) + 1/\mu(K^c)$.

Portanto,

j) $\mu(P{\uparrow}\,(P{\uparrow}P)) = 1/\mu(\Pi^c) + 1/\mu((\Pi^c)^c) = 1/\mu\,(\Pi^c) + 1/\mu\,(\Pi)$.

Desta forma, sendo Π^c o conjunto complementar de Π em relação ao espaço métrico G, podemos considerar que $\pi_P = \mu(\Pi \cup \Pi^c)$ é a medida de dois conjuntos complementares em relação a um espaço trans-métrico G – facilmente se constata que a função μ é uma função de medida, posto que satisfaz os postulados que definem uma função como “medida”, a saber:

Seja f uma função definida em uma σ-álgebra[5], com valores entre $[0,\infty]$ (os valores de função poderiam estar no conjunto $[0,\infty] \cup \{\Phi\}$), f é uma função-medida se satisfizer os seguintes postulados:

M1) $f(\varnothing) = 0$;

M2) $f(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \ldots) = f(E_1) + f(E_2) + f(E_3) + \ldots$.

Sendo assim, a grandeza π_p mede o "tamanho coberto" pela região Π e sua complementar Π^c. Assim, institui-se um critério de medida para que o princípio de não-contradição seja verdadeiro: o tamanho coberto pelas traduções transmétricas de *P* e não-*P* deve ser infinito, isto é, o conjunto formado pela união das traduções transmétricas de *P* e não-*P* deve ter medida infinita, caso contrário, o princípio de não-contradição não é verdadeiro.

Referências Bibliográficas

1) Anderson, J. A.D. W. "Representing Geometrical Knowledge". *W. Phil. Trans.R.Soc.* London, series B, Vol. 352, no 1358, pp 1129-1139;
2) _____. "Perspex Machine XI: Topology of Transreal Numbers". In: JMEC5 2008, S.1., Hong Kong, pp 330-338;
3) Bell, J. L., De Vidi, d. and Soloman, G (2001), *Logical Options: An Introduction to Classical and Alternative Logics.* (Petersborough, ON: Broadview Press);
4) Chaitin, G. *The Limits of Mathematics*, Spring Verlag, 1988;
5) _____. *Meta Math! The Quest for Omega*, Pantheon Books, 2005;
6) Chang, C.C. (1963), 'Logic with Positive and Negative Truth Values', *Acta Philosophica Fennica* 14: 19-39
7) Da Costa, N. C. A. (1974), 'On the Theory of Inconsistent Formal Systems', *Notre Dame Journal of Formal Logic* 15: 497-510;
8) ______. (1993), *Sistemas Formais Inconsistentes*, Curitiba: Editora UFPR
9) Dória F.A. and J.F. Costa. "Special Issue on Hypercomputation", *Applied Mathematics and Computation,* Vol. 178, 2006;
10) Dummett, M. (1959), *Elements of Intuitonism*, (Oxford: Oxford University Press);
11) Fine, K. (1975), 'Vagueness, Truth and Logic', *Synthese* 30: 265-300; reeditado em Keefe and Smith (1996), ch 9;
12) Gabbay, D. and Guenther, F. (1983-1989), (eds), *Handbook of Philosophical Logic* (Dordrecht: Kluwer Academic Publishers);
13) _______. (2001-), *Handbook of Philosophical Logic*, second edition (Dordrecht: Kluwer Academic Publishers);

[5] Uma σ-álgebra em X satisfaz os seguintes postulados: (1) $\varnothing$ está em X; (2) Se $E_1, E_2, \ldots E_n, \ldots$ estão em X, então $E_1 \cup E_2 \ldots \cup E_n \cup \ldots$ está em X.

14) Gödel, K. (1930), 'Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkallküls', *Manatshefte für Mathematik und Physik* 28: 173-98;
15) Gottwald, S. (2001), *A Treatise on Many Valued Logics* (Baldock: Research Studies Press Ltd);
16) Haack, S. (1974), *Deviant Logic* (Cambridge: Cambridge University Press);
17) Hájek, P. (1998), *Metamathematics of Fuzzy Logic* (Dordrecht: Kluwer);
18) Heijenoort, J. van (1967), *From Frege to Gödel* (Cambridge, MA: Harvard University Press);
19) Jáskowski, S. (1969), 'Propositional Calculus for Contradictory Deductive Systems', *Studia Logica* 24: 143-57;
20) Kleene, S.C. (1952), *Introduction to Metamathematics* (Amsterdam: North Holland);
21) Malinowski, G. (1993), *Many-Valued Logics* (Oxford: Oxford University Press);
22) Priest, G. *An Introduction to Non-Classical Logic. From If to Is.* Second Edition, Cambridge University Press, 2008;